第45講　総合問題(5)

1　6つの面にそれぞれ0，0，1，-1，i，$-i$と書かれたさいころがある．ここでiは虚数単位である．このさいころを3回投げ，1回目に出た目の値をX_1，2回目に出た目の値をX_2，3回目に出た目の値をX_3とする．

(1)　積X_1X_2が実数となる確率を求めよ．

(2)　和X_1+X_2が実数となる確率を求めよ．

(3)　積$X_1X_2X_3$が実数となる確率を求めよ．

(4)　積$X_1X_2X_3$が0となる確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 直線 $4x-3y=4$ と x 軸に接して，点 $(4,\ 1)$ を通る円のうち，半径が最小となる円の方程式を求めよ．

［2］ 原点 O を中心とする半径 2 の円に，点 P$(4,\ 0)$ から引いた 2 つの接線の接点のうち，第 1 象限にある点を A，残りの点を B とする．直線 AB が x 軸と交わる点を C とする．C から直線 AP に引いた垂線と AP の交点を D とする．

(1) 線分 AP の長さを求めよ．

(2) 線分 CD の長さを求めよ．

(3) 3 点 P，C，D を通る円の方程式を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　自然数 m，n において，その最大公約数は 23 とする．ただし，$m<n$ とする．

(1)　$n=230$ であるとき，m のとりうる値は [ア] 個あり，その中で最小のものは [イ]，最大のものは [ウ] である．m が最大のとき，m と n の最小公倍数は [エ] である．

(2)　$mn=11109$ であるとき，m と n の最小公倍数は [オ] である．

(3)　$mn<7935$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは [カ] である．

(4)　$m+n=1150$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは [キ] である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　総合問題(5)

［1］　曲線 C：$y=x^2-1$ 上を動く点Ｐと直線 l：$y=x-3$ との距離が最小となるとき，その距離を求めたい．$\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ とおくと，C と l の距離は

$\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}\left|-t^2+t-\boxed{\text{イ}}\right|$　……①　と表される．ここで，点Ｐは直線 l の上側にあることより，①の絶対値の中は $\boxed{\text{ウ}}$ である．よって①は $t=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ をとり，これが求める距離の最小値である．

ただし $\boxed{\text{ウ}}$ は　①　正　　②　負　　③　0　から選べ．

［2］　和が 756，最大公約数が 84 である 2 つの自然数のうち，ともに 3 桁であるものの組は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　総合問題(5)

1　6つの面にそれぞれ 0，0，1，-1，i，$-i$ と書かれたさいころがある．ここで i は虚数単位である．このさいころを3回投げ，1回目に出た目の値を X_1，2回目に出た目の値を X_2，3回目に出た目の値を X_3 とする．

(1)　積 X_1X_2 が実数となる確率を求めよ．

(2)　和 X_1+X_2 が実数となる確率を求めよ．

(3)　積 $X_1X_2X_3$ が実数となる確率を求めよ．

(4)　積 $X_1X_2X_3$ が 0 となる確率を求めよ．

(1)　積 X_1X_2 が実数となる場合を，以下に分けて考える．

(i)　X_1，X_2 のいずれかに 0 が含まれるとき　　(ii)　X_1，X_2 ともに 0 でないとき

(i)のとき

X_1，X_2 ともに 0 が含まれないことの余事象を考えて，その確率は　$1-\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{5}{9}$

(ii)のとき

X_1，X_2 がともに実数，またはともに虚数のときで，その確率は　$\left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{6}\right)^2=\frac{2}{9}$

(i)，(ii)より求める確率は　$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\boldsymbol{\frac{7}{9}}$

(2)　和 X_1+X_2 が実数となるのは，ともに実数，または i と $-i$ の両方が出る場合で

その確率は　$\left(\frac{4}{6}\right)^2+2!\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{9}+\frac{1}{18}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3)　積 $X_1X_2X_3$ が実数となる場合を，以下に分けて考える．

(i)　積 X_1X_2 が 0 のとき　　(ii)　積 X_1X_2 が 0 以外の実数のとき

(iii)　積 X_1X_2 が虚数のとき

(i)のとき　(1)よりその確率は　$\frac{5}{9}$　　このとき X_3 は任意　　よって　$\frac{5}{9}\times1=\frac{5}{9}$

(ii)のとき

(1)よりその確率は　$\frac{2}{9}$　　このとき X_3 は実数であればよい　　よって　$\frac{2}{9}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{27}$

(iii)のとき

(1)の余事象より，その確率は　$\frac{2}{9}$　　このとき X_3 は 0 または虚数であればよい

よって　$\frac{2}{9}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{27}$

(i)～(iii)より　求める確率は　$\frac{5}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\boldsymbol{\frac{23}{27}}$

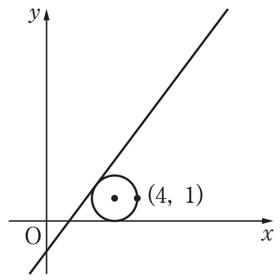
(4)　積 $X_1X_2X_3$ が 0 になるのは，積 X_1X_2 が 0，または積 X_1X_2 が 0 以外で X_3 が 0 のとき

よって求める確率は　$\frac{5}{9}\times1+\frac{4}{9}\times\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{19}{27}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　直線 $4x-3y=4$ と x 軸に接して，点 $(4,\ 1)$ を通る円のうち，半径が最小となる円の方程式を求めよ．

求める円の中心を $(a,\ b)$ とすると，$(a,\ b)$ は2直線 $4x-3y-4=0$ と $y=0$ から等距離にある．よって　$\dfrac{|4a-3b-4|}{\sqrt{16+9}}=|b|$



図より $(a,\ b)$ は $4x-3y-4>0$，$y>0$ を満たす領域にあるので，$4a-3b-4>0$，$b>0$

よって　$\dfrac{4a-3b-4}{5}=b$　　つまり　$a=2b+1$

また，半径は b であることより，求める円の方程式は

$(x-2b-1)^2+(y-b)^2=b^2$ $(b>0)$　とおける．

この円が $(4,\ 1)$ を通るので　$(3-2b)^2+(1-b)^2=b^2$

$$2b^2-7b+5=0\qquad (2b-5)(b-1)=0\qquad b=\frac{5}{2},\ 1$$

このうち半径が小さいのは $b=1$ のとき．

よって求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-1)^2=1}$

2 [2]　原点Oを中心とする半径2の円に，点 $\mathrm{P}(4,\ 0)$ から引いた2つの接線の接点のうち，第1象限にある点をA，残りの点をBとする．直線ABが x 軸と交わる点をCとする．Cから直線APに引いた垂線とAPの交点をDとする．

(1)　線分APの長さを求めよ．　　(2)　線分CDの長さを求めよ．

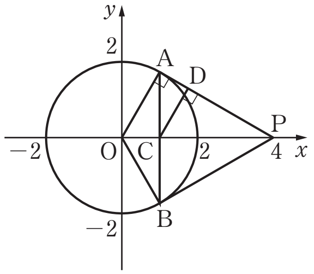
(3)　3点P，C，Dを通る円の方程式を求めよ．

(1)　△PAOは∠PAO＝90°，OA：OP＝2：4＝1：2の直角三角形より

OA：AP＝1：$\sqrt{3}$　　したがって　$\mathbf{AP}=\sqrt{3}\,\mathrm{OA}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

(2)　(1)より ∠AOP＝60°　　よって直角三角形AOCで

$$\mathrm{OC}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}=1$$



これと △PAO∽△PDC より　OA：CD＝OP：CP

つまり　2：CD＝4：3　　ゆえに　$\mathbf{CD}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(3)　求める円は，直角三角形PDCの外接円である．

よってその中心は，線分CPの中点であり，その座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$　半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{CP}=\dfrac{3}{2}$

したがって求める円の方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 自然数 m，n において，その最大公約数は23とする．ただし，$m<n$ とする．

(1) $n=230$ であるとき，m のとりうる値は **ア** 個あり，その中で最小のものは **イ** ，最大のものは **ウ** である．m が最大のとき，m と n の最小公倍数は **エ** である．

(2) $mn=11109$ であるとき，m と n の最小公倍数は **オ** である．

(3) $mn<7935$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは **カ** である．

(4) $m+n=1150$ であるとき，mn のとりうる値で最大のものは **キ** である．

m，n の最大公約数が23であることより

$m=23m'$，$n=23n'$（m'，n' は互いに素の自然数）とおける．

(1)　$n=230$ のとき　$230=23n'$　より　$n'=10=2\times5$

$m<n$ より $m'<n'$ であり，m'，n' は互いに素であることから

m' は1，3，7，9に限られる．

よって m のとりうる値は **4** 個あり，その中で最小のものは　$m=23\times1=\mathbf{23}$

また，最大のものは $m=23\times9=\mathbf{207}$ であり，このとき m と n の最小公倍数は

$23\times10\times9=\mathbf{2070}$

(2)　$mn=11109$　より　$23m'\times23n'=23^2\times21$　よって　$m'n'=21$

$m'n'=21$ かつ $m'<n'$ を満たす互いに素な自然数 m'，n' は確かに存在する．

よって m と n の最小公倍数は　$23m'n'=23\times21=\mathbf{483}$

(3)　$mn<7935=23^2\times15$　より　$m'n'<15$

$m'n'<15$ かつ $m'<n'$ を満たす互いに素な自然数 m'，n' のうち

$m'n'$ が最大となるのは　$(m',\ n')=(1,\ 14),\ (2,\ 7)$ で

このとき mn は最大値　$23^2m'n'=\mathbf{7406}$ をとる．

(4)　$m+n=1150$　より　$23m'+23n'=23\times50$　よって　$m'+n'=50$

このとき　$m'n'=m'(50-m')=-(m'-25)^2+625$

$m'+n'=50$　かつ　$m'<n'$　より　$1\leqq m'\leqq24$

$m'=24$ のとき　$n'=26$ であり，m'，n' が互いに素であることに反し不適．

$m'=23$ のとき　$n'=27$ であり　m'，n' は互いに素である．

このとき $m'n'$ は最大となり，mn は最大値 $23^2\times23\times27=\mathbf{328509}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　総合問題(5)

[1]　曲線 $C：y=x^2-1$ 上を動く点Pと直線 $l：y=x-3$ との距離が最小となるとき，その距離を求めたい．$\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ とおくと，C と l の距離は

$\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{ア}}}\left|-t^2+t-\boxed{イ}\right|$ ……①　と表される．ここで，点Pは直線 l の上側にあることより，①の絶対値の中は $\boxed{ウ}$ である．よって①は $t=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ をとり，これが求める距離の最小値である．

ただし $\boxed{ウ}$ は　①　正　　②　負　　③　0　から選べ．

[2]　和が756，最大公約数が84である2つの自然数のうち，ともに3桁であるものの組は $\boxed{ケ}$ 個ある．

解答例

[1]　$\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ と $l：x-y-3=0$ の距離は　$\dfrac{|t-t^2+1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{2}}}|-t^2+t-\mathbf{2}|$ ……①

と表される．

ここで点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-1)$ は $y>x-3$　つまり　$x-y-3<0$ を満たす領域内にあるので，$t-(t^2-1)-3<0$　つまり　$-t^2+t-2<0$ であり，①の絶対値の中は**負**である．

よって　①は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t+2)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\right\}$ と変形できる．

このことより，①は $t=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{7}{4}=\dfrac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}$ をとり，

これが求める距離の最小値である．

[2]　最大公約数が84である2つの自然数を a，b（$a\leqq b$）とすると，

$a=84a'$，$b=84b'$（a'，b' は互いに素の自然数．$a'\leqq b'$）と表せる．

$a+b=756$ より　$84(a'+b')=756$　　$a'+b'=9$

よって　$(a',\ b')=(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5)$ に限られる．

このとき　$(a,\ b)=(84,\ 672),\ (168,\ 588),\ (336,\ 420)$

このうちともに3桁であるものの組は**2**個

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。